Revista Complutense de Educación ISSN: 1130-2496
Vol. 12 Núm. 2 (2001) 623-637

Una visión histórica en torno a la generación del conocimiento matemático

FRANCISCO A. GONZÁLEZ REDONDO
Departamento de Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid

RESUMEN

Admitidas sin discusión en el mundo de la pedagogía matemática las estrechas relaciones que existen —y deben existir— entre los procesos de construcción y de aprehensión de los conceptos y métodos de la disciplina, y los asociados a la evolución que ha tenido nuestra Ciencia en la Historia, la génesis de los conocimientos y la transmisión de los mismos, en este artículo se presenta un modelo historiográfico que podría contribuir a fijar algunos puntos de una problemática que debe enfrontarse en esa Sociedad del conocimiento que se concibe para el futuro inmediato.

ABSTRACT

At present it is assumed in the Pedagogy of Mathematics the existence of an intimate relationship between the processes of construction and comprehension of the concepts and methods of the discipline and those related to the historical evolution of our science, the creation of knowledge and its transmission. In this paper, a historiographical model is introduced as a contribution to establishing some points in the problematical issues which has to undertake the Society of knowledge as conceived for the immediate future.

Finalizado el año 2000 (pomposamente denominado —según declaración de la UNESCO— «Año Mundial de las Matemáticas»), terminaba un siglo y se daba paso a uno nuevo, el XXI, en el que Occidente debía emprender la vía de la Sociedad cognitiva, basada en la adquisición de conocimientos y en la enseñanza y el aprendizaje permanentes, y todo ello —por lo que nos afecta más directamente— en el seno de un sistema educativo como el español, siempre en crisis y con reformas sucesivas encadenándose a todos los niveles.

Sociedad de la información, Mundialización, Globalización, Civilización científica y técnica..., constituyen términos que denotan conceptos entendidos como enfrentamiento, como problemas abordables solamente desde una revaloración de la cultura general como instrumento de comprensión de nuestro Mundo[1].

Pero dado que el futuro sólo puede construirse conociendo y asumiendo el pasado, me ha parecido oportuno presentar en este número de la *Revista Complutense de Educación* una reflexión que hunde sus raíces en esa fuente inagotable de recursos que suponen los estudios históricos sobre las diferentes ciencias, aportando una visión historiográfica novedosa —un modelo[2]— que considero puede contribuir a la ingente tarea colectiva que se plantea.

1. La naturaleza científica del conocimiento matemático

A los efectos que interesan a estas páginas y, por tanto, prescindiendo de otras consideraciones —simplificando—, una Ciencia —en particular, la Matemática— puede considerarse que se constituye en tanto que conjunto de teorías científicas. Del mismo modo, una teoría científica es un sistema hipotético-deductivo, es decir, un conjunto de enunciados concatenados por las leyes de la Lógica —los teoremas—, que parten de unos primitivos que se admiten sin demostración —los axiomas—, y que se refieren a un conjunto de conceptos primarios indefinidos, cuya existencia se postula y admite, o a los definidos a partir de ellos (González Redondo 1993).

Cabe preguntarse, por tanto, en qué momento los desarrollos matemáticos adquirieron naturaleza científica y, por tanto, cuándo nació propiamente el conocimiento matemático. La cuestión no es baladí. Determinar qué es la Matemática resulta requisito imprescindible para organizar su enseñanza, pues dependiendo de qué concepto se tenga —o adopte— de la disciplina los enfoques

[1] Sobre estas cuestiones pueden consultarse los diferentes trabajos recogidos en González Redondo (ed.) (2002).

[2] El enfoque historiográfico que vamos a introducir lo presentamos por primera vez en González Redondo (1995) y lo desarrollamos en González Redondo (2000) -para el caso del Análisis Dimensional- y González Redondo (2002) -para la Matemática en general-, todo ello en el marco de la Escuela de Fundamentos y Filosofía de la Ciencia del Prof. F. González de Posada.

docentes pueden diferir enormemente. En este sentido, el estudio histórico aporta algo de luz al tema.

De acuerdo con este enfoque, nuestra disciplina nacería en el momento en que se formulase la primera teoría matemática (es decir, la primera organización axiomático-deductiva de enunciados matemáticos), instante a partir del cual puede considerarse que ha alcanzado un estado científico. Sería entonces cuando surgiría un objeto historiable, en el que comenzaría su Historia, y cuando, en consecuencia, la enseñanza de lo matemático experimentaría —necesariamente— un cambio revolucionario. Veamos cuándo sucede esto.

De acuerdo con lo que conocemos hoy, y a pesar de diferentes menciones a otros autores anteriores, el primer ejemplo de utilización sistemática del método axiomático-deductivo lo constituyen los *Elementos* de Euclides de Alejandría. Con este tratado (este hito histórico) lo matemático adquiriría por primera vez carácter científico. Con él nacería la Matemática como Ciencia y comenzaría su Historia.

Empieza Euclides con la relación de 23 «definiciones» (realmente caracterizaciones de conceptos primarios indefinibles, verdades inmediatas y evidentes para el alejandrino) de los objetos matemáticos que constituyen el punto de partida de la que se ha venido en considerar «axiomática material», sobre los que predicarán las diferentes proposiciones que compondrán los 13 libros del tratado: punto, línea (segmento rectilíneo), extremos de la línea, superficie, ángulo, etc. Continúa dividiendo los axiomas de su Geometría en dos grupos: «postulados» o axiomas propiamente geométricos, y «nociones comunes» o axiomas de validez universal que se podrían aplicar a todas las disciplinas a las que se quiera dar carácter científico. El resto del primer libro (y análogamente los doce siguientes) corresponde a las proposiciones que referidas a los objetos definidos, pueden demostrarse recurriendo únicamente a los axiomas admitidos.

Obviamente los *Elementos* no surgen de la nada, pero desconocemos prácticamente tanto sus precedentes matemáticos como las circunstancias en las que se escribieron, por no insistir en la carencia completa de datos acerca del propio Euclides. Hoy se admite que constituyen la recopilación de numerosos enunciados propiamente matemáticos que no se habían reunido en un edificio sistemático hasta entonces, pero, sobre todo, se destaca (Heath 1956), y en esto se coincide con sus primeros comentaristas: a) lo certero en la selección de los problemas y teoremas que integra en el sistema, puesto que solamente incluye, de entre las enormes posibilidades a su alcance, aquellos resultados pertinentes para la construcción de elementos; y b) la variedad y riqueza de los métodos de demostración empleados.

Desde el punto de vista didáctico, como reconoce en sus comentarios Proclo, las perspectivas para la valoración de los *Elementos* crecen: a) en ellos se busca la claridad y la concisión, eliminando todo lo superfluo que dificulta la adquisición del conocimiento; b) se pretende que el estudiante que se aproxime al tratado obtenga una intelección precisa del conjunto de la materia; en suma, c) el autor no sólo pretende enseñar Geometría (y Aritmética), sino que intenta formar a los lectores en cómo construirla y aprenderla.

Pero que nadie busque en Euclides (porque no lo encontrará) ninguna «finalidad» al margen de la propiamente matemática. No se detecta adscripción alguna a posibles escuelas filosóficas, solamente desarrollos matemáticos. No existe aplicabilidad (potencial) —mucho menos aplicación— a ningún otro ámbito científico o técnico como la Astronomía, la Óptica o la Geografía, que podían haber sido, si no desarrollados, sí mencionados. Los *Elementos* son sólo, pura y llanamente, Matemática, recogida —eso sí— de las diferentes tradiciones.

2. Categorías históricas, historiación y enseñanza de la Matemática

La perspectiva histórica de que disfrutamos es suficientemente amplia para que pueda afirmarse que tratados como el de Euclides se convierten en fundadores, en punto de inicio de la Historia de la Matemática, que podrá o no hacerse coincidir, en la periodización de sus desarrollos posteriores, con las etapas que se han establecido en la Historia universal: Antigüedad, Edad Media, Modernidad, Edad Contemporánea. Conjuntamente con ello, la utilización de los prefijos de antelación 'pre' (previo, pero de naturaleza distinta al lexema cuya carga semántica complementa) y 'proto' (previo, pero de la misma naturaleza) facilitarán tanto la división en etapas —*Prehistoria* y *Protohistoria*— de la evolución del mundo de «lo matemático» hasta su constitución como Ciencia, cuanto la ubicación de los desarrollos de acuerdo con su momento histórico[3].

[3] Como parece claro estas consideraciones, que aplicadas a la Historia de la Ciencia consideramos originales, constituyen una adaptación tomada de la Historia Universal, que reformulamos como sigue: la Historia del hombre comienza en el momento que se desarrolla la escritura. Previamente la *Protohistoria* discurriría desde que existe propiamente el hombre —la especie *homo sapiens*— hasta que se descubre la escritura, mientras que sería *Prehistoria* todo lo anterior a la aparición de la especie. Periodización heterodoxa, sin duda, resulta sorprendente que la aparición del *homo sapiens* no se haya generalizado entre los historiadores constituyéndose en «hito» singular que proporcione el oportuno corte histórico y se siga hablando, por ejemplo, de un período como el Paleolítico que integra conjuntamente al hombre y a los homínidos.

En tanto que prefijos de antelación también pueden utilizarse no sólo en sentido temporal, sino también conceptual. Así, previa a la existencia de la Matemática como Ciencia, pero conformada por conceptos, métodos y desarrollos de naturaleza propiamente matemática, lo que existiría sería *Protomatemática*. El conjunto de descubrimientos que conducirán directamente a la construcción de los conceptos matemáticos, con algo propio de los sentidos que tendrán posteriormente, pero anteriores a toda consideración teórica general conformarían la *Prematemática*.

Análogamente, el conocimiento matemático puede presentarse, explicarse o enseñarse de diferentes modos. En primer lugar, científicamente, es decir, integrado estrictamente en el formato axiomático-deductivo de la teoría a la que pertenecen: sería una Presentación matemática. Pero también se pueden plantear los conceptos abstractos en un orden y con una interrelación entre ellos no sometidos al formato teórico: en este caso se trataría de una «presentación protomatemática». Finalmente, si el enfoque adoptado se limita a ejemplos o aplicaciones a métodos concretos, en la que conceptos y teorías quedan solamente subyacentes, estaríamos ante una «presentación prematemática».

Cabe preguntarse, por tanto, si es posible fijar otro «hito» —previo a los *Elementos*— que permita dividir en dos etapas claramente diferenciadas la evolución histórica de los conceptos matemáticos hasta su constitución como Ciencia, una en la que los desarrollos tengan un carácter claramente científico —la inmediatamente precedente de Euclides—, y otra, previa y necesaria para las formulaciones posteriores, pero que debe distinguirse por la naturaleza aún no científica de las realizaciones[4].

Este «hito» puede ser la formulación, durante la primera mitad del siglo VI a.C., por parte de Tales de Mileto —pues así se le atribuye y reconoce—, de cinco enunciados acerca de propiedades generales de algunas figuras geométricas, supuestamente los primeros con estas características de la Historia (Boyer 1986):

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
2. Los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.

[4] Igual que no todos los pueblos de la Tierra alcanzaron la etapa histórica al mismo tiempo que mesopotámicos y egipcios, en el mundo griego entre el siglo III a.C. y el V d.C. será en el primer y único contexto en el que se alcance la etapa propiamente matemática, hasta que en algunos países de la Europa occidental pueda considerarse recuperada —y comenzada a superar— en torno al siglo XVII.

3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son, respectivamente, iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Atribuirle también unas posibles demostraciones de estos teorema resulta exagerado, pero, en cualquier caso, por el carácter general puramente teórico de los enunciados puede considerarse que Tales constituye el «hito» buscado. Con él puede hacerse el corte histórico que buscábamos. Todo lo anterior a él pertenecería a la *Prehistoria* de la Matemática. Todo lo comprendido entre Tales y Euclides constituiría la *Protohistoria* de la Matemática.

3. El estadio intermedio en la generación del conocimiento matemático

La idea de «demostración» que aparece por primera vez en Tales —si así lo admitimos— o, en cualquier caso, poco después en Pitágoras —si hacemos caso al resumen de Proclo— está en directa relación con la percepción de la posibilidad de conceptualización de lo verdadero, de la certeza, y a la posterior y generalizada aceptación incontestable de ella por todos los interlocutores. Esta posibilidad aporta un nuevo carácter a las atribuciones del conocimiento humano, al conceder a la Filosofía lo que hasta ese momento solamente se admitía en el mundo de la religión o el mito.

Así, llegado el siglo IV a.C., el de Platón y Aristóteles, probablemente gracias a la contribución matemática de los pitagóricos y a la filosófica de los pensadores del siglo anterior, fue posible hacer la distinción entre aquello de lo que podía haber conocimiento cierto, *episteme*, lo inmutable, y el mundo de lo opinable, *doxa*. Los ámbitos de ese conocimiento cierto, las Ciencias, solamente eran los cuatro *mathemata*, etimológicamente, «lo que se aprende», «lo que puede ser aprendido»: Aritmética, Geometría, Astronomía y Música.

La naturaleza de los silogismos, el formato axiomático-deductivo latente o —probablemente— presente en los trabajos de los matemáticos del siglo IV a.C. (Teodoro, Teeteto, Eudoxo, Menecmo...), se estudiarán monográficamente por parte de Aristóteles en sus tratados de Lógica (*Órganon*), sobre todo en sus *Analíticos posteriores*. Incluso las definiciones euclídeas probablemente estuvieran entonces planteadas ya de forma casi idéntica a como aparecen en los *Elementos*, como puede observarse en la *Metafísica* del filósofo macedonio. Y es que entre los geómetras anteriores a Euclides ya debía haberse alcanzado un acuerdo suficiente sobre las características de la demostración matemática, que en sus líneas generales son las que se recogen en los únicos trabajos completos que se conservan anteriores al siglo III a.C., *Sobre la esfera en movimiento* y *Sobre ortos y ocasos* de Autólico de Pitania (Heath 1981).

En todo caso, los *Elementos* suponen la culminación de una tradición griega de elaboración de tratados elementales de los que no se conserva ninguno. Pero conviene destacar que en el mundo helénico la expresión «elementos» tenía diferentes significados:

a) Recopilaciones de algunos conocimientos primordiales determinados.

b) Aquellas proposiciones que desempeñaban un papel esencial en la posibilidad de organización deductiva de otros desarrollos.

c) Todo aquello (problema, lema o teorema) que puede ser utilizado para establecer algún nuevo resultado. Pero en su sentido más propio «Elementos» designa aquel grupo de asunciones y proposiciones que tienen el carácter de principios en la ligazón deductiva de un determinado campo de conocimientos.

Algunos años después de publicado el magno tratado euclídeo, el mayor matemático de la Antigüedad, Arquímedes de Siracusa, precisaba en *El Método* lo que desde el siglo anterior venía destacándose: el conocimiento matemático se acrecienta mediante el complemento mutuo de los procesos de análisis y de síntesis, de inducción y de deducción; las presentaciones sintéticas que aportan la solidez lógica al objeto de estudio no son el resultado final de ensayos, rectificaciones, experiencias, analogías, abstracciones aisladas, etc.

Para la formación matemática, para generar el conocimiento matemático en los escolares, parece natural seguir el mismo proceso: a) germinar los conceptos abstractos a partir de numerosas observaciones, experiencias e intuiciones (Puig Adam 1960), pues las síntesis *a priori* bloquean las aptitudes analizadoras de los estudiantes; b) transmitir la naturaleza científica (axiomático-deductiva) de la disciplina a partir de generalizaciones concretas y teoremas particulares, que se van engarzando en el entramado lógico de las teorías, de modo que los alumnos alcancen las síntesis que plantearán los profesores; y c) integrar las motivaciones prácticas iniciales y las aplicaciones posteriores a la realidad concreta con el carácter lúdico del disfrute intelectual. En suma, recuperando los términos introducidos antes, llegar a la Matemática desde la Protomatemática.

4. Creación y transmisión de «lo matemático»

La visión que la sociedad tiene de la Matemática es la de que se trata del campo del saber que se dedica al dominio de lo numérico y del cálculo, y que, por tanto, los matemáticos son poco más que los guardianes del saber contable. Esta perspectiva tan mutilada es —ciertamente— muy próxima a lo que comenzaba para los griegos clásicos siendo la *Logística*, más una Aritmética práctica elemental que una Teoría de Números matemática —propiamente la *Aritmética* helénica—. Pero aún más, hoy, entre técnicos e ingenieros de las diferentes ramas y entre científicos aplicados de las diferentes disciplinas, la Matemática es poco más que un lenguaje simbólico útil para expresar las fórmulas que precisan y necesario para los numerosos cálculos que deben realizar.

Sin embargo, lo más grave es que este sentido tan parcial de la Matemática es el que desde diferentes pedestales pedagógicos se ha pretendido generalizar, el de simple conjunto de herramientas que debe conocer todo ciudadano y en las que hay que instruir en la Escuela. Con este planteamiento, las características abstractas de la materia, cuya utilidad y/o aplicabilidad resultan inverosímiles para los estudiantes que la reciben, ocasionan el bien conocido bloqueo y rechazo y logran el temido y denostado fracaso escolar.

En las tablillas de los mesopotámicos o los papiros de los egipcios no se encuentra nada (por lo menos, de acuerdo con los datos que proporciona la Arqueología matemática en su estado actual) que pueda parecerse a una demostración de una proposición general. Todo lo más se «comprueba» la validez de un resultado concreto obtenido para un problema particular planteado, en una serie más o menos amplia de problemas de un mismo tipo. Ni unos ni otros, los más cultos de entre los antiguos, siquiera tuvieron la necesidad —o disfrutaron la oportunidad— de enunciar ningún método general. Parecía bastarles la validez sistemática de los resultados individuales en su contraste con la experiencia.

Una parte muy importante de la Matemática elemental, de los contenidos, técnicas y métodos habituales matemáticos de la Educación Primaria, tiene más semejanzas con lo que encontraremos en las civilizaciones más antiguas que con lo generalizado en las exposiciones de la materia desde la Grecia helenística. La relación de los ejercicios y problemas sacados de situaciones reales del medio circundante y con aplicabilidad en la vida práctica, su relación con otros ámbitos en los que tendemos a parcelar el conocimiento, puede acompañarse con la motivación hacia la comprobación, con la guía hacia el rigor de los procesos de razonamiento.

Si junto con el enfoque predominantemente prehistórico (o prematemático, en el sentido que estamos defendiendo en este trabajo), planteásemos un enfoque respetuosamente histórico en las asignaturas escolares, de modo que predominase la estima por lo científico de las ciencias, y del que trascendiera, además, la belleza de las aplicaciones que tiene en los diferentes ámbitos de la vida cotidiana, el rechazo difícilmente podría justificarse y el fracaso escolar probablemente empezaría a dejar de tener sentido.

Por supuesto no es esa la tendencia generalizada. En la enseñanza de la matemática actual (y no sólo en ella) predomina la opinión de que las abstracciones son intrínsecamente frustrantes y que en la experimentalidad esencial y omnipresente —que consideran compatible con la naturaleza de esta Ciencia— radica el fundamento de lo que debe ser la instrucción matemática edificante y motivadora y la que contribuirá a hacer cultos a los escolares. Se proporciona sólo la instrucción de técnicos, cuasi-ingenieros o pseudocientíficos aplicados sin Ciencia. En el mundo de la especialización impuesta durante el siglo XX no se conciben las mentalidades universales, los individuos con una formación integral general. No se entiende que la Historia nos proporciona una clara idea de qué es ser culto; y que aquel que realmente lo es tiene la capacidad para aplicar su cultura, las Ciencias aprendidas, en contextos prácticos.

5. Los períodos históricos del saber matemático

La Modernidad, esa era que comienza *en torno a* 1600 en la que se alcanzará definitivamente la superación de los logros de la Antigüedad tras los siglos de la Edad Media, tendrá entre sus ingredientes constitutivos las posibilidades que va aportando la nueva Matemática del siglo XVII. El punto de partida debe situarse un poco antes del comienzo del siglo, en la *Introducción al Arte Analítica* (1591) de Vieta, pero se cimienta en la *Geometría* (1637) de Descartes, centrado en el desarrollo de la notación simbólica para las relaciones magnitudinales en las igualdades entre medidas que suponen las ecuaciones. Y las que suelen reconocerse como principales novedades —las capitales— tienen mucho que ver con este desarrollo: Análisis algebraico, Geometría analítica y Cálculo infinitesimal.

Pero si para el acervo cultural universal hay una aportación capital de la nueva época que en el siglo XVII comienza, ésta es la posibilidad de matematización, por primera vez, en formato axiomático-deductivo (escritos, como se decía, *more geométrico*), de algunos aspectos de la realidad; es decir, el nacimiento de las teorías físicas, apuntado por Galileo para la Cinemática en sus

Discursos sobre las dos nuevas Ciencias (1638) —todavía prácticamente en el ámbito sólo de la Matemática— y culminado en los *Principios matemáticos de la Filosofía Natural* de Newton (1687), donde la introducción de los conceptos de masa y fuerza dan entrada a la Dinámica en el dominio de la Matemática. El siglo siguiente, el de Euler, D'Alembert, Lagrange y Laplace, supondrá el de la culminación del edificio newtoniano en un proceso en el que la redacción retórica se sustituye por la expresión algebraica y los desarrollos geométricos por los analíticos (González Redondo 2000).

Desde esta nueva perspectiva se podían construir modelos matemáticos del mundo de lo sensible que, en su contraste con la Naturaleza, parecían «verdaderos»[5]. La Matemática se constituía —no sólo, pero sí de manera importante— en una herramienta para el conocimiento «cierto» —sucesivamente— del movimiento de los cuerpos, de los fenómenos termológicos, eléctricos, ópticos o magnéticos. A todo ello contribuiría en no poca medida durante el siglo XVIII un Análisis matemático al que no se le exige rigor teórico, sino utilidad a la hora de proporcionar los útiles para aprehender científicamente la Realidad.

Y como si todo esto hubiese ocurrido en fechas tan próximas a nosotros que —por la falta de perspectiva histórica— nos hubieran pasado desapercibidas la motivación, gestación, formulación y desarrollo (no sólo) del Análisis (pero sí especialmente), de estas circunstancias se harían eco hace unos años los redactores del currículo de la Educación Secundaria (ya pre-universitaria) al hacer que en todas y cada una de las opciones o itinerarios la Matemática se convirtiera únicamente en un lenguaje auxiliar para aquellos que van a estudiar una disciplina científica (Física, Química, Biología o Geología), una ingeniería (de Caminos, Industrial, Telecomunicaciones, etc.), alguna ciencia social (Económicas, Empresariales, etc.), una carrera de la rama sanitaria, etc., y no se generalizase como un saber valioso *per se*.

Un momento singular, «hito» histórico en la evolución de la Física y la Matemática, punto de origen del Neoclasicismo matemático[6], lo constituye la

---

[5] Con las «leyes» de (Galileo y) Newton se podrían predecir comportamientos físicos; por ejemplo, la existencia de planetas desconocidos que se irán «descubriendo» matemáticamente, no observacionalmente. Más adelante serán esas mismas leyes las que permitirán salir de la atmósfera terrestre, llegar a la Luna y, lo que es incluso más importante, volver después a la Tierra.

[6] Utilizamos a nuestra libre interpretación las denominaciones establecidas hace ya demasiados decenios para los distintos períodos históricos, aunque no se nos escapa que podrían discutirse. Normalmente se denomina Postmodernidad a la era científica, filosófica y social que sigue al derrumbamiento de los presupuestos de la Modernidad con la formulación de la Relatividad General de Einstein y el desarrollo de las teorías cuánticas, época que trataremos en el

obra de Fourier, quien no sólo aporta con su *Teoría analítica del calor* (construida entre la primera publicación de 1807 y la definitiva de 1822) la primera teoría de la Física-matemática en sentido actual, sino quizá, también, la primera aproximación al concepto contemporáneo del punto de partida de toda axiomatización, de todo sistema hipotético deductivo: el objeto de estudio primordial e indefinido, el calor, no se sabe qué es *a priori* ni para Fourier resulta necesario ni importa que se sepa (desde luego no será el tradicional «calórico» ni se atisba aún como «forma de energía»). En todo caso, su comportamiento se somete a la ley de la conducción que éste enuncia, prácticamente «definitoria», al mismo tiempo, de su naturaleza (González de Posada *et al* 1991).

La composición de los *Elementos* había constituido una obra de capital importancia tanto teórica como didáctica. En cuanto a lo primero, la recopilación de resultados demostrados estableció el modelo metodológico a seguir para sistematizar científicamente un cuerpo de conocimiento. Por lo segundo, se había convertido en el libro de texto para los estudiantes de Geometría y Aritmética, no sólo ya del mundo helenístico, sino que por el carácter de «manual» de la obra —y adaptado no siempre convenientemente—, mantendría una posición central en la enseñanza secundaria de muchos países —entre ellos España— hasta finales del siglo XIX.

A medida que avanzaba el siglo XX el Cálculo Infinitesimal comenzó a generalizar su presencia en los Bachilleratos de los países desarrollados. Ciertamente resultaba imprescindible para las formulaciones de una materia como la Física, pero se explicaba (y se sigue explicando) al margen de ella, prescindiendo orgullosamente de sus orígenes y sentidos creacionales.

Pero en los momentos iniciales del siglo XIX la fundamentación de todas y cada una de las ramas de la Matemática se asumía como objetivo pendiente. Estaba claro que incluso la Geometría euclídea necesitaba una profunda revisión. La época que hemos conjeturado que comienza con Fourier puede caracterizarse como la de consecución de esa tarea: los matemáticos aportaron los conceptos abstractos y las organizaciones teóricas como ejercicios intelectuales al margen de la que ya era remota idealización simbólica de la Realidad sensible. Se formaliza el Análisis (el concepto de número real, el de función real

el próximo parágrafo. Por otro lado, resulta necesario modificar otras manifestaciones de la historiografía usual, pues situar la contemporaneidad en el siglo XIX no parece aceptable. Optamos por considerar —y no parece descabellado— que el período que comienza con Fourier es la época Neoclásica, teniendo en cuenta los propósitos fundamentadores de los matemáticos que la caracterizan.

de variable(s) real(es), el de continuidad, límite, derivada...), el Álgebra se establece como estudio de las estructuras, se ordenan las nuevas geometrías ubicando —muy depurada— la que presentó Euclides en un marco general con las demás... hasta establecer sólidamente la Aritmética del número natural ante el cambio de siglo (Boyer 1986).

En suma, la Matemática en su conjunto (y sus partes) alcanzaba rango científico (tras sus estadios protocientíficos) bajo el formato de los sistemas axiomáticos formales, en los que los conceptos primarios perdían toda conexión con las verdades abstraídas de la Naturaleza. Eso sí, para encontrar posteriores aplicaciones cuando los estudiosos de la Realidad tenían que echar mano del repertorio de Matemática —ahora sí, intrínsecamente inútil en modo apreciable— puesto a su disposición para ser utilizado oportunamente. Toda la Matemática podía comenzar a ser objeto de la Historia, sus partes pasaban a ser objetos historiables.

6. En torno al conocimiento matemático contemporáneo

Desde el punto de vista del estudio filosófico del conjunto de las Ciencias, el período que hemos denominado Neoclasicismo terminaría con el siglo XIX, identificándose este cambio con la ruptura con el mundo newtoniano-kantiano que supone la revolución relativista. Para no cambiar demasiadas denominaciones todavía generalizadas, el instante actual que nos toca vivir debe considerarse nuestra Edad Contemporánea, y su comienzo puede fijarse en un momento, *en torno a* 1930, y una serie de «hitos» delimitadores del corte que describiremos a continuación.

La Metaciencia que gobernó la formulación científica de la Geometría por Euclides, la Mecánica por Newton y los diferentes campos, tanto de la Matemática como de la Física hasta comenzar el siglo XX, se caracterizaba por la estricta independencia y nítida separabilidad de los conceptos primarios indefinibles, puntos de partida de las teorías de una y de otra. Sin embargo, el análisis de la formulación de la Relatividad General (cerrada con la eliminación de la constante cosmológica por Einstein tras la hipótesis de Hubble de 1929 sobre la expansión del Universo) impone una nueva visión metacientífica: los conceptos magnitudinales primordiales no sólo son no separables, sino que están en íntima e intrínseca «respectividad» entre ellos (González de Posada 2001). Sin embargo, la Matemática que usa sigue respondiendo a algunas presuposiciones filosóficas que ya se asumían en la época de Aristóteles. Dado que la Geometría, el Álgebra y el Análisis que se siguen utilizando responden a unas presuposiciones clásicas, caben serias dudas acerca de que la Matemática de la respectividad relativista responda a la estructura lógica de los formatos axiomático-deductivos.

Por ejemplo, la masa de los cuerpos (magnitud primaria y, por tanto, indefinible en la Mecánica Clásica) no es ya que dependa de la velocidad a la que se mueve el cuerpo (magnitud secundaria, definida por la derivada del vector desplazamiento respecto del tiempo), es que puede «definirse» (¿dejando de tener el carácter de concepto «primario» de la teoría?) en función de la masa del cuerpo en reposo m_0, la velocidad del cuerpo v y la velocidad de la luz c (González de Posada y González Redondo 1994).

Por otro lado, la aparición de modelos no sólo no deterministas, sino intrínsecamente probabilistas para la aprehensión matemática de la Realidad, en Economía, Medicina, Sociología, etc. y, sobre todo, con las Mecánicas estadísticas comenzadas a alumbrar en el último tercio del siglo XIX, llevará durante las primeras décadas del XX a una «incertidumbre» matemática desconocida en los modelos causales clásicos habituales hasta entonces.

Además, el convencimiento de que la materia es discreta hace que la matemática del número real no sirva (hay que prescindir de la continuidad de la recta real, de los conceptos de función real continua, derivable, etc.). Y a esto hay que añadir, entre otras cosas, que la discretización tampoco es la de los números enteros. Ciertamente, aunque la Física cuántica, la que pretende dar cuenta de estos temas, es propiamente matemática (y no es fácil que alguien crea que la Naturaleza pueda parecerse a las formulaciones que desde aquélla se presentan) existe el convencimiento, aunque en torno a 1930 se consideraba firmemente establecida, de que todavía le falta desarrollar toda su matematicidad.

Pero lo que trastocará más profundamente el panorama de la formulación matemática serán los sobrecogedores hallazgos de Gödel, recogidos en «Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia matemática* y sistemas relacionados», de 1931, en el que presentará su Teorema de incompletitud. Éste afirma que si una teoría formal T que abarca la teoría de los números naturales es consistente, entonces es incompleta, es decir, existe un enunciado «S» tal que ni «S» ni «no S» pueden ser demostrados en T; como uno de los dos enunciados «S» o «no S» tiene que ser verdadero, existe una proposición verdadera de la teoría que no es demostrable y, por lo tanto, es indecidible. En consecuencia, no puede ser demostrada la consistencia de un sistema lo suficientemente amplio como para abarcar la aritmética de los números naturales.

El único ingrediente que hacía intrínsecamente diferente a la Matemática del resto del conocimiento científico, la validez incontestable de sus resultados, se diluía. Había comenzado lo que Kline (1985) denominaría «desastres». Hasta en el propio método axiomático-deductivo, esa aproximación «perfecta» a la exactitud del conocimiento, se encontraban fallos.

7. A modo de conclusiones

Para finalizar, podemos afirmar que, indudablemente, debemos estar en crisis. Han transcurrido 70 años desde aquellos *entonces*, hemos cambiado de centuria, y lo que acabamos de destacar no sólo no constituye objeto de la Historia sino que sigue siendo radicalmente presente. Y el mundo educativo lo recibe directamente. Sin que existan establecidos y generalizados con firmeza unos objetos, metodologías, estructuras internas y consistencia comunes, es decir, unas caracterizaciones de disciplinas como las Matemáticas (que pierden la singularidad deseable en beneficio de una pluralidad aún no evitable) o como las Físicas (unas incompatibles con las otras), su transmisión y divulgación se ven dificultadas.

Pero la enseñanza de nuestra Ciencia está en manos del profesorado formado en la Universidad, al que se ha dado —en general— la más matemática de las presentaciones posibles: sucesión de abstracciones entrelazadas deductivamente, para las que se evita consciente y orgullosamente toda motivación respetuosa con la evolución histórica y a la que se le hurtan las perspectivas de las aplicaciones que de ella harán científicos de otros campos e ingenieros. En ellos recaerán, sin embargo, unas enseñanzas Primaria y Secundaria en las que las respectivas presentaciones serán esencialmente prematemáticas y protomatemáticas. Es legítimo, por tanto, plantearse cuestiones como desde qué punto de vista y con qué herramientas lo harán, a quién debe atribuírsele la responsabilidad por la situación en la que nos encontramos o a quién corresponde presentar soluciones.

El Mundo del siglo XXI, la Sociedad del conocimiento no se puede concebir sin la Matemática (sus modelos cognitivos, su función de lenguaje para la Ciencia y la Técnica, etc.). Resolver muchos de los problemas que existen hoy —y otros que se irán planteando en el futuro— podría hacerse desde un dominio adecuado de los modos y procesos de génesis de sus conceptos. El ejemplo de los saberes matemáticos puede ser sumamente útil; hacer uso del análisis historiográfico que hemos presentado puede resultar fructífero. Pero, en todo caso, será el tiempo quien lo dirá.

Bibliografía

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Bunge, M. (1967). *Scientific Research*. (2 vols.). New York: Springer-Verlag.

Castro, A. (1956). Descripción, narración e historiografía. En *Dos Ensayos*. México: Porrúa.

Fauvel, J., y Gray, J. (1987). *The History of Mathematics: A Reader*. Milton Keynes: The Open University.

González de Posada, F. (2001). *La Física del siglo XX en la Metafísica de Zubiri*. Madrid: Instituto de España.

González de Posada, F., y González Redondo, F. A. (1994). Acerca de la no aplicabilidad lógica del Análisis Dimensional clásico a la Teoría de la relatividad. En *Anuario Científico 1993 del Grupo de Análisis Dimensional*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 19-22.

González de Posada, F.; González Redondo, F. A., y Redondo Alvarado, M.ª D. (1991). Las «Remarques Gènèrales» en la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. En *Anuario Científico 1990 del Grupo de Análisis Dimensional*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 157-171.

González Redondo, F. A. (1993). *El Análisis Dimensional en la obra de Mario Bunge*. Tesis Doctoral en Filosofía y Ciencias de la Educación. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

— (1995). Historia del Postulado General de Homogeneidad. La Prehistoria del Análisis Dimensional (I). En *Anuario Científico 1994 del Grupo de Análisis Dimensional*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid, pp. 167-174.

— (2000). *Historia del Análisis Dimensional*. Tesis Doctoral en Matemáticas. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

— (2002). Un modelo historiográfico para las Ciencias. La evolución de la Matemática hasta su establecimiento como disciplina científica. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 61, 84-93.

— (ed.). (2002). *La Educación en España. Contextos generales. Ámbitos disciplinares*. Número monográfico de *Arbor. Ciencia, pensamiento y cultura*, CLXXIII (681), septiembre. Madrid: CSIC.

Heath, T. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (3 vols.). New York: Dover.

— (1981). *A History of Greek Mathematics* (2 vols.). New York: Dover.

Kline, M. (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI.

Puig Adam, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación.

Vega Reñón, L. (1991). «Introducción General» a Euclides: *Elementos*. Madrid: Gredos, pp. 7-184.