revista de EDUCACIÓN
Nº 374 OCTUBRE-DICIEMBRE 2016

Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación

Conceptual and procedural knowledge in mathematics: their development after decades of research

Ángela Castro
Montserrat Prat
Núria Gorgorió

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación[1]

Conceptual and procedural knowledge in mathematics: their development after decades of research

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325

Ángela Castro
Montserrat Prat
Núria Gorgorió
Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

La investigación en relación al conocimiento conceptual y al conocimiento procedimental en matemáticas ha sido tema de interés y foco de debate a lo largo de los años. En la literatura se encuentran discusiones que abordan desde qué debe desarrollarse en mayor medida en la escuela, si las habilidades o los procedimientos; hasta propuestas acerca de cómo deben estudiarse las interacciones entre ambos tipos de conocimiento. Este trabajo analiza la situación actual del campo a través de la revisión de las caracterizaciones más relevantes presentes en la literatura para ambos tipos de conocimiento, las razones que originaron cambios de enfoque en las investigaciones, las problemáticas actuales y las líneas abiertas de investigación. A su vez, se aporta un cuadro-resumen de

(1) La investigación que se presenta en este artículo ha sido desarrollada en el marco del proyecto de investigación «Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el Grado de Educación Primaria: matemáticas para maestros" financiado por la Dirección General de Investigación (Ref. I+D EDU2013-4683-R). Los autores de la misma son miembros del Grupo de Investigación «Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM)» reconocido y financiado por la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (ref. 2014 SGR 00723).

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

los estudios más relevantes según cada tipo de conocimiento, poniendo el foco en el dominio matemático al que pertenecen. Las investigaciones consultadas sugieren que inicialmente los estudios sobre el conocimiento conceptual y procedimental se centraron en niños, extendiéndose posteriormente su estudio a adolescentes, adultos jóvenes y estudiantes para maestro. En un primer momento, las investigaciones sobre estos tipos de conocimiento se centraron esencialmente en los dominios de conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional; intentado en la mayoría de los casos, determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades. Con el trascurso de los años el interés por estos dos tipos de conocimiento se ha acrecentado, y su estudio se ha extendido hacia otros dominios matemáticos, como por ejemplo, las ecuaciones, principios de adición y la substracción, multiplicación y división. No obstante, se observa en este trabajo, que tras décadas de investigación no existe un consenso acerca de cómo definir y medir el conocimiento conceptual y procedimental con un grado suficiente de validez.

Palabras clave: conocimiento conceptual, conocimiento procedimental, flexibilidad procedimental, investigación en educación matemática, dominios matemáticos.

Abstract

Investigations related to the conceptual and procedural knowledge in mathematics have been an object of interest and focus of debate throughout the years. In the literature is possible to find discussions that address from which should be further developed in school, if the skills or procedures; up to proposals about how to study interactions between both types of knowledge. This paper analyses the current situation in the field by reviewing the most relevant characterizations in the literature for both types of knowledge, the reasons that led to changes in research focus, the current problems and the open lines of research. In turn, contributes with a summary table of the most significant studies in the literature of each type of knowledge on focus on the mathematical domain to which they belong. The consulted research suggests that initially the studies about conceptual and procedural knowledge focused on children, and being later extended on adolescents, young adults and pre-service teachers. Initially, research on types of knowledge mainly focused on the counting domains, single-digit addition, multi-digit addition, fractions and proportional reasoning; trying in most cases, determine the acquisition order of the concepts versus skills. Over the years the interest in these two types of knowledge has increased, and its study has been extended to other mathematical domains, such as equations, principles of addition and subtraction, multiplication and division. Nevertheless, it is observed in this work that after decades of research there is no consensus about how to define and measure the conceptual and procedural knowledge with an adequate validity level.

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Keywords: conceptual knowledge, procedural knowledge, procedural flexibility, research in mathematics education, mathematics domains.

Este trabajo espera promover la discusión entre los investigadores, sobre cómo abordar el estudio del conocimiento conceptual y procedimental, reconociendo los progresos y las dificultades asociadas a éste. Proporciona elementos para orientar la elaboración de instrumentos de evaluación de matemáticas, en pequeña o gran escala, como por ejemplo la elaboración de pruebas de diagnóstico escolares o de acceso a la universidad. Destaca la necesidad de considerar en la elaboración de dichos instrumentos las distintas dimensiones de los conocimientos a evaluar, reconociendo las relaciones existentes, así como las limitaciones en su medición.

Introducción

Diferentes teorías del aprendizaje y la cognición postulan que nuestro comportamiento está determinado por al menos dos tipos diferentes de conocimiento. Uno proporciona una comprensión abstracta de los principios y las relaciones entre las piezas de conocimiento en un determinado dominio, y el otro permite resolver con eficacia y rapidez los problemas. Estos conocimientos, denominados respectivamente por la investigación actual como conocimiento conceptual y conocimiento procedimental, han sido ampliamente reconocidos y estudiados a través de los años desde los diferentes dominios matemáticos (Baroody, 2003; Schneider & Stern, 2005). En la literatura se encuentran diversas teorías que intentan explicar cómo se desarrollan e interactúan estos dos conocimientos, abordadas desde distintas perspectivas y que han sido objeto de intensos debates. Discusiones que van desde plantearse qué es más importante desarrollar y potenciar en la escuela, si las habilidades o los procedimientos, hasta como deberían estudiarse sus interacciones.

En un primer momento el estudio de ambos conocimientos se centraba especialmente en niños (Baroody & Gannon, 1984; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; entre otros). Con el trascurso de los años este interés se ha acrecentado, incorporándose su estudio en adolescentes y adultos jóvenes (Dubé, 2014; Dubé & Robinson, 2010; entre otros); y estudiantes para maestro (Chinnappan & Forrester, 2014; Groth & Bergner, 2006; entre otros). Extendiéndose finalmente hacia otros dominios matemáticos como la estadística, la estimación, y las ecuaciones, que no se incluían inicialmente (ver Tabla 1). Sin embargo, no se da en la literatura un acuerdo que permita describir con claridad qué es el conocimiento conceptual o el conocimiento procedimental.

En este artículo revisamos algunas de las caracterizaciones más relevantes para ambos tipos de conocimiento, así como las discusiones que originaron cambios de enfoque en la investigación. A su vez, presentamos en un cuadro las principales investigaciones en el campo, según el tipo de conocimiento en el que se centran y el dominio matemático al que pertenecen. Finalmente abordamos las problemáticas actuales y las líneas abiertas de investigación.

Caracterizaciones del conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental

Tras décadas de investigación no parece haber un consenso para definir el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, ni tampoco para determinar cuál es la mejor manera de medirlos (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Crooks & Alibali, 2014; Star, 2005). Esto se debe esencialmente a que ambos tipos de conocimiento se encuentran en un continuo, y no siempre pueden separarse (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Posiblemente la visualización de estos conocimientos como un mismo continuo, que va desde el conocimiento escaso hasta el ricamente conectado, ha dado lugar a que la mayoría de los investigadores en educación matemática intenten distinguir entre tipo y calidad del conocimiento (Baroody, Feil & Johnson, 2007). Así, la diversidad de caracterizaciones presentes en el área puede ser un reflejo de las diferentes visiones que tienen los investigadores acerca de cómo las personas adquieren los procedimientos y conceptos (Star, 2005).

La revisión de las diferentes caracterizaciones de los términos conocimiento conceptual y conocimiento procedimental en matemáticas sugiere, que el conocimiento conceptual suele equipararse a un conocimiento profundo, ricamente conectado, flexible y asociado a

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

conocimiento significativo. Mientras que el conocimiento procedimental ha sido comúnmente asociado a un conocimiento escasamente conectado, automatizado y no profundo. En esta línea autores como Skemp (1978) y Bell, Costello y Küchemann (1983), entre otros, proporcionaron algunas aproximaciones a la distinción actual entre conocimiento conceptual y procedimental, pero el uso generalizado de estos términos se le atribuye Hiebert y Lefevre (1986), quienes proponen posiblemente una de las caracterizaciones más reconocidas y utilizadas en el área. Estos autores caracterizan el conocimiento conceptual como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información (saber qué o porqué). El conocimiento procedimental, es descrito por Hiebert y Lefevre (1986) como un conocimiento compuesto por dos partes distintas. La primera de ellas, conformada por el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. Mientras que, la segunda parte, se compone por los algoritmos o reglas utilizados para resolver las tareas matemáticas; instrucciones ejecutadas en una secuencia linealmente predeterminada, que paso a paso establecen como completar tareas (saber cómo).

La visión de Hiebert y Lefevre (1986) sobre estos conocimientos ha sido ampliamente recogida e interpretada a través de los años (Byrnes & Wasik, 1991; Carpenter, 1986; Groth & Bergner, 2006; entre otros). Así por ejemplo, encontramos diversas caracterizaciones que comparten las características descritas por Hiebert y Lefevre (1986), definiendo el conocimiento conceptual en términos de las interrelaciones entre las piezas de conocimiento, y la comprensión de los conceptos básicos (Byrnes y Wasik, 1991), o de los principios que gobiernan un dominio, de manera explícita o no (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle- Johnson, Siegler & Alibali, 2001). También, se ha asociado a la comprensión integral y funcional de las ideas matemáticas, destacándose que el grado de la comprensión conceptual de los alumnos está relacionado con la riqueza y el alcance de las conexiones que han establecido (Kilpatric, Swafford y Findelli, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). Estas caracterizaciones destacan el carácter flexible del conocimiento conceptual, que no está vinculado a problemas específicos, siendo ampliamente generalizable y, pudiendo ser o no ser verbalizable.

El conocimiento procedimental se ha descrito en términos de la habilidad para ejecutar secuencias de acción para resolver problemas, vinculado a problemas específicos y no ampliamente generalizable (Rittle-

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). Este conocimiento es hasta cierto punto automatizado, por lo que su aplicación requiere de una atención consciente mínima. La automatización se logra a través de la práctica, lo que permitiría su rápida activación y ejecución. A su vez, este carácter automatizado implicaría que este conocimiento no es, o sólo es parcialmente abierto a la inspección consciente, siendo difícilmente verbalizado o transformado en procesos mentales superiores, lo que explicaría por qué sólo está ligado a tipos de problemas específicos (Schneider y Stern, 2005).

Hay autores que rechazan la idea de la superficialidad del conocimiento procedimental, caracterizada por la operacionalidad y secuencialidad con que se ha descrito tradicionalmente, argumentado que el tipo de conocimiento y la calidad de éste deben ser tratados como dimensiones independientes. Posiblemente uno de los mayores defensores de la llamada reconceptualización del conocimiento procedimental es Star (2000, 2002, 2005, 2007). Star (2005) defiende la idea de que el uso popular de estos términos confunde tipos de conocimiento con propiedades o cualidades que pueden caracterizarlos. Este autor sostiene que el punto final de la adquisición de conceptos es cuando el estudiante comprende, conociendo los hechos o principios, utilizándolos para realizar tareas como reconocer, identificar, explicar, evaluar, juzgar, entre otras. Por el contrario, el punto final de la adquisición de los procedimientos es cuando las habilidades se convierten en rutina y pueden ejecutarse con fluidez, es decir, cuando un conocimiento concreto se ha automatizado. Para este autor el término conocimiento conceptual ha llegado a abarcar no sólo el conocimiento de los conceptos, sino también la forma en que los conceptos pueden ser conocidos. Star (2000, 2005, 2007) señala que hay alguna evidencia que sugiere que el conocimiento procedimental profundo existe, como un conocimiento abstracto, pero no conceptual. Star (2005) propone definir estos tipos de conocimiento separando ambas dimensiones, argumentando que ambos pueden tener una calidad profunda o superficial.

Para Baroody, Feil y Johnson (2007) algunos educadores matemáticos han sido culpables, sin pretenderlo, de simplificar excesivamente el uso de los términos conocimiento procedimental o habilidades computacionales, asociándolos con el conocimiento memorizado por

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

repetición. Estos autores coinciden con Star (2005) en que debe considerarse específica y cuidadosamente estos constructos, destacando que la profundidad procedimental y el conocimiento conceptual no pueden estar separados. Baroody, Feil y Johnson (2007) sugieren que si bien puede existir de manera parcial conocimiento conceptual y procedimental superficial independientes, el conocimiento procedimental profundo sólo existe con un conocimiento conceptual profundo y viceversa, Estos autores proponen un esquema que ilustra a través del modelo de la *adaptive expertise,* las conexiones o mútua dependencia entre ambos tipos de conocimientos; y una reconceptualización para ambos constructos. Definiendo el conocimiento procedimental como las acciones o manipulaciones mentales que incluyen reglas, estrategias y algoritmos para completar una tarea. Mientras que el conocimiento conceptual se define como el conocimiento acerca de los hechos, generalizaciones y principios.

Posiblemente el carácter significativo de las relaciones establecidas entre las piezas de conocimiento que caracterizan al conocimiento conceptual, ha dado lugar a que éste se asocie con el conocimiento significativo. Mientras que el carácter operacionalizado y secuencial con que ha sido comúnmente caracterizado el conocimiento procedimental, ha ocasionado que se relacione con el aprendizaje memorístico. No obstante, tal como lo señalan Rittle-Johnson y Schneider (2014), la definición del conocimiento conceptual como un conocimiento ricamente conectado, ha avanzado hacia un pensamiento más recientemente que ha visto la riqueza de conexiones como una característica del conocimiento conceptual que aumenta con la experiencia; sugieriendo definirlo en términos del conocimiento de los conceptos.

La descripción del conocimiento procedimental como la habilidad de ejecutar secuencias de acción (procedimientos) para resolver problemas, es una visión predominante en investigaciones del pasado (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Aunque no parece haber un consenso sobre la existencia de un conocimiento procedimental profundo, desde hace algunos años las investigaciones han comenzado a abordar el conocimiento procedimental desde una perspectiva diferente, incorporando el estudio de la flexibilidad procedimental (Star & Seifert, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007; Berk, Taber, Carrino & Poetzl, 2009, entre otros). La habilidad procedimental ha sido definida en términos del conocimiento de múltiples maneras de resolver problemas y el conocimiento de cuándo utilizarlo (Kilpatrick et al., 2001); o como la habilidad para emplear múltiples métodos de solución, resolver el mismo problema utilizando distintos métodos, y elegir estratégicamente entre los métodos más eficientes. Así, un solucionador flexible tiene un conocimiento de varios procedimientos de resolución, y la capacidad de inventar o innovar para crear nuevos procedimientos (Star & Seifert, 2006). Otros estudios, han propuesto diferenciar procesos y procedimientos. En esta línea Gray y Tall (1991; 1994) introducen la noción de *Procept*, como la amalgama del proceso y el concepto representado por el mismo símbolo, señalando que los pensadores más flexibles ven un símbolo tanto como un proceso para hacer las matemáticas como un concepto que pensar; mientras que los pensadores menos flexibles, sólo lo ven como un proceso para llevar a cabo.

Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: primeras teorías

Inicialmente las investigaciones en el área abordaron la disyuntiva comprensión versus habilidades en el contexto de los programas de instrucción. Los esfuerzos se dirigían a determinar qué se debía desarrollar y enseñar en la escuela (Hiebert & Lefevre, 1986), afectando la organización y la clasificación de los contenidos curriculares, como por ejemplo, los contenidos y secuencias de actividades propuestas en los libros de texto y en la instrucción (e.g. ver en Brownell, 1935; Bruner, 1960; Gagné, 1968). Los defensores de las habilidades frente a los conceptos, postulaban que el foco de la instrucción debía asegurar la memorización de las habilidades computacionales, y no cultivar la compresión matemática de los conceptos (e.g. Drill Theory en Baroody, 2003). Por otro lado, estaban quienes abogaban por la comprensión de los conceptos, defendiendo que el foco de la instrucción debía fomentar la compresión conceptual, y no la memorización de las habilidades básicas (e.g. Incidental-Learning Theory en Baroody, 2003).

Mientras algunos investigadores dedicaban sus esfuerzos en determinar si debían promoverse los conceptos o las habilidades, otros apuntaban hacia una postura intermedia en la cual la enseñanza de las matemáticas debía centrarse en la promoción significativa de las

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

habilidades (e.g. Meaning Theory en Baroody, 2003). Así, durante el último cuarto del siglo XX, el interés por determinar si los conceptos son más importantes que los procedimientos fue reemplazado por la discusión sobre su orden de adquisición, apareciendo dos puntos de vista teóricos que dominaron el debate, *conceptos primero* en oposición a *procedimientos primero* (Baroody, 2003).

Las *Concepts-First Theories* sugerían que los niños inicialmente adquieren o desarrollan la comprensión de los conceptos. El conocimiento de los conceptos se utiliza para generar y seleccionar los procedimientos necesarios para la resolución de problemas en un determinado dominio (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson, Siegler & Star, 2011; Schneider & Stern, 2005); y a partir de la práctica se obtiene el conocimiento procedimental del concepto. Algunas de las investigaciones empíricas, con orientaciones cognitivas o curriculares, que proporcionaron evidencias para sustentar esta teoría son: en el dominio del conteo las investigaciones de Gelman y Meck (1983; 1986) y Wynn (1990); en resolución de problemas de adición y substracción, las de Briars y Larkin (1984) y Riley, Greeno y Heller (1983); en la adición de un sólo dígito, las de Siegler y Crowley (1994) y Cowan y Renton (1996), entre otros. Las *Procedures-First Theories* sugerían que el desarrollo de las habilidades precede y subyace al desarrollo de los conceptos; proponiendo que los niños inicialmente adquieren las habilidades en un dominio específico, siendo a partir de la reflexión de la práctica como de manera gradual se adquiere el conocimiento conceptual abstracto (Baroody, 2003; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Schneider & Stern, 2005). Investigaciones como las de Baroody y Gannon (1984); Briars y Siegler (1984); Fuson (1988); Frye, Braisby, Lowe, Maroudas & Nicholls (1989); Siegler (1991); Siegler y Stern (1998); entre otras, proporcionaron evidencias empíricas que soportaron esta teoría.

Rittle-Johnson y Siegler (1998) tras una revisión de la literatura sobre el tema, concluyen que de manera general a pesar de que hay evidencias que en algunos dominios, el desarrollo de los conceptos precede al desarrollo de los procedimientos (e.g. razonamiento proporcional, la adición de fracciones y la adición de un sólo dígito); en otros dominios las habilidades preceden a los conceptos (e.g. conteo y la multiplicación de fracciones). Rittle-Johnson y colaboradores (Rittle- Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson y Siegler, 1998; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001) señalaron que las *Concepts-First Theories* y las *Procedures-First*

Theories se equivocan, criticando las afirmaciones acerca de que un tipo de conocimiento precede a otro. Estos autores señalan tres factores que amenazan la validez de los resultados obtenidos en estas investigaciones, y que podrían explicar estas diferencias: la naturaleza del conocimiento temprano, el impacto de la experiencia previa y las limitaciones metodológicas. Rittle-Johnson y colaboradores concluyen que no hay un orden fijo en el desarrollo de las habilidades en comparación con la comprensión de los conceptos. Esta visión contribuye a un cambio de enfoque en el estudio de los conocimientos conceptual y procedimental.

Relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental: el cambio de enfoque

Diferentes autores han argumentado que el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental no se desarrollan independientemente entre sí. En un inicio estos dos tipos de conocimiento fueron vistos como entidades separadas, ya fuera compitiendo por su atención para la instrucción o coexistiendo como vecinos disjuntos (Hiebert & Lefevre, 1986). Con el trascurso de los años el debate sobre ellos avanzó hacia un punto de vista más moderado, en el que los procedimientos y los conceptos pueden estar relacionados; originando un cambio de sentido en la manera de abordar las investigaciones sobre estos tipos de conocimiento y su desarrollo.

El modelo iterativo

Para Rittle-Johnson y Alibali (1999) los conocimientos conceptual y procedimental no se desarrollan independientemente, sugiriendo la existencia de relaciones bidireccionales entre éstos que se desarrollan gradualmente. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001) argumentan que estos conocimientos se influyen mutuamente durante todo su desarrollo, proponiendo la existencia de un modelo iterativo, donde incrementos de un tipo de conocimiento conducen a incrementos en el otro que gatilla nuevos conocimientos en el primero. Bajo este modelo, el aumento en el conocimiento conceptual puede conducir a generación de procesos; y, el conocimiento procedimental puede conducir a ganancias en la compresión conceptual, que sucesivamente pueden conducir a más incrementos en el primero; pudiendo no ser equivalentes.

 Revista de Educación, 374. Octubre-Diciembre 2016, pp. 43-68
Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

El modelo iterativo se sustenta en investigaciones en el dominio de la aritmética (e.g. Baroody & Ginsburg, 1986; Byrnes, 1992; Byrnes & Wasik; 1991; Canobi, 2009; Canobi & Bethune 2008; Hiebert & Wearne, 1996), la equivalencia matemática (e.g. Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson & Siegler, 1998); y el ámbito de las fracciones (e.g Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001), entre otras. En estos estudios, se destaca que la vinculación entre estos tipos de conocimiento s puede beneficiar la adquisición y aplicación de ambos conocimientos (Baroody, 2003). Así, la construcción significativa de relaciones entre el conocimiento conceptual y los procedimientos –mediante secuencias de instrucción y/o a partir del conocimiento previo– puede beneficiar al conocimiento procedimental pues contribuye a recordar los procedimientos, favorece su uso efectivo, permite adaptar los procedimientos existentes en función de las demandas del problema; o influye en la generación de nuevos procedimientos. Por su parte, el conocimiento procedimental puede influir en la comprensión conceptual, mejorando la representación de problemas, incrementando la disponibilidad de recursos mentales, la identificación de conceptos erróneos y la reflexión acerca de las causas que hacen que los procedimientos funcionen (Baroody, 2003; Hiebert & Lefevre 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; y Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Estos estudios han aportado ideas clave sobre el potencial de las relaciones entre ambos conocimientos, pero también han puesto en evidencia que la forma en que se desarrolla esta relación es poco clara.

Investigaciones centradas en las relaciones entre ambos conocimientos

Describir cómo interactúan el conocimiento conceptual y el procedimental es fundamental para comprender cómo se produce el desarrollo del conocimiento, así como para mejorar la instrucción (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

Inicialmente, los estudios sobre estos conocimientos se centraron esencialmente en los dominios de conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional; intentado principalmente determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades (ver en Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Con el trascurso de los años se ha extendido su estudio hacia otros dominios matemáticos, como las ecuaciones, equivalencia, principios de la adición y la substracción, multiplicación y división; y, en menor medida en dominios como la estimación, la estadística y la densidad (ver Tabla I).

TABLA I. Estudios sobre el conocimiento conceptual y procedimental por dominio.

Dominio	C. Conceptual	C. Procedimental	Ambos
General	Crooks y Alibali (2014)	Star (2005; 2007)	Baroody (2003) Baroody, Feil y Johnson (2007) Bisanz y LeFevre (1992) Hiebert y LeFevre (1986) Carpenter (1986) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Rittle-Johnson y Schneider (2014) Star (2000) Star y Stylianides (2000) Verschaffel, Luwel, Torbeyns y Van Dooren (2009)
Conteo	Crooks y Alibali (2014)		Baroody y Ginsburg (1986) Briars y Siegler (1984) Frye, Braisby, Lowe, Maroudas, y Nicholls (1989) Gelman y Meck (1983; 1986) Lefevre et al., (2006) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Siegler (1991) Wynn (1990)
Adición / Sustracción con uno y/o varios dígitos		Fayol y Thevenot (2012)	Baroody y Ginsburg (1986) Canobi (2009) Canobi y Bethure (2008) Hiebert y Wearne (1996) Peled y Segalis (2005) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Siegler y Araya (2005)
Propiedades de la adición y/o la sustracción	Baroody y Lai (2007) Canobi, Reeve y Pattison (2002) Crooks y Abali (2014) Dubé y Robinson (2010) Robinson y Dubé (2009) Robinson y Ninowski (2003) Robinson, Ninowski y Gray (2006)	Siegler y Stern (1998)	Baroody y Gannon (1984) Baroody y Ginsburg (1986) Baroody, Torbeyns y Verschaffel (2009) Baroody, Lai, Li y Baroody (2009) Bisanz, Watchorn, Piatt y Sherman (2009) Bryant, Christie y Rendu (1999) Canobi (2004; 2005; 2009) Canobi y Bethure (2008) Canobi, Reeve y Pattison (1998; 2003) Cowan y Renton (1996) Dubé (2014) Farrington-Flint, Canobi, Wood y Faulkner (2007) Gilmore y Bryant (2006; 2008) Gilmore y Spelke (2008) Gilmore y Papadatou- Pastou (2009) Patel y Canobi (2010) Prather y Alibali (2009) Robinson y LeFevre (2012) Siegler y Araya (2005) Siegler y Crowley (1994) Schneider (2012) Schneider y Stern (2009)

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Dominio	C. Conceptual	C. Procedimental	Ambos
Ecuaciones		Rittle-Johnson, Star y Durkin (2012) Star (2002) Star y Newton (2009) Star y Seifert (2006)	Prather y Alibali (2011) Rittle-Johnson y Star (2007; 2009) Rittle-Johnson, Star y Durkin (2009) Schneider, Rittle -Johnson y Stern (2011)
Fracciones	Hech, Close y Santini (2003)		Bailey et al.,(2015) Byrnes y Wasik (1991) Chinnappan y Forrester (2014) Hallett, Nunes y Bryant (2010) Hallett, Nunes, Bryant y Thorpe (2012) Peled y Segalis (2005) Rayner, Pitsolantis y Osana (2009) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001) Schneider y Stern (2005; 2010)
Equivalencia	Crooks y Alibali (2014)		Matthews y Rittle-Johnson (2009) Rittle-Johnson y Alibali (1999)
Resolución Problemas	Oyarzún y Salvo (2010)	Briars y Larkin (1984)	Blöte, Van der Burg y K lein (2001) Riley, Greeno y Heller (1983)
Densidad	Schneider y Hardy (2000)		
Multiplicación y divisón	Dubé y Robinson (2010a, b) Robinson y Ninowski (2003) Robinson, Ninowski y Gray (2006)	Fayol y Thevenot (2012) Rittle-Johnson y Kmicikewyck (2008)	Dubé (2014) Robinson y LeFevre (2012)
Decimales			Peled y Segalis (2005) Rittle-Johnson y Koedinger (2009)
Estadística			Groth y Bergner (2006)
Estimación			LeFevre, Greenham y Waheed (1993) Star y Rittle-Johnson (2009)
Razonamiento proporcional		Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009)	Dixon y Moore (1996) Rittle-Johnson y Siegler (1998)
Álgebra		Blessing y Anderson (1996)	
Cálculo mental			Blöte, Klein, Beishuizen (2000)
Enteros			Byrnes (1992)

Fuente: Elaboración propia

Las interacciones entre concepto-procedimiento han sido analizadas esencialmente desde dos perspectivas, la resolución de problemas y las secuencias de instrucción. También existen, en menor medida, investigaciones que estudian el desarrollo de estos conocimientos individualmente, ya sea reconociendo y considerando la existencia de los vínculos entre ambos tipos de conocimiento (e.g. Blöte, Klein, & Beishuinzen, 2000; Hech, Close & Santini, 2003; Star & Seifter, 2006) o no (e.g. Blessing & Anderson, 1996).

Desde la resolución de problemas en el dominio de los principios de la adición, se han analizado las relaciones entre las habilidades de procedimiento en la resolución de problemas de suma, y el conocimiento conceptual de algunos principios de la adición, como la conmutatividad, asociatividad e inversión, entre otros (e.g. Canobi, 2004, 2005; Canobi & Bethune, 2008; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; Farrington-Flint, Canobi, Wood and Faulkner, 2007; Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Pastel & Canobi, 2010). En estos estudios el conocimiento conceptual ha sido evaluado a través de juicios y justificación de tareas, y del uso de las relaciones parte-todo para resolver los problemas. La habilidad de resolución de problemas ha sido evaluada a través de los repertorios de procedimientos, velocidad y precisión. De aquí se han derivado diferentes perfiles de compresión conceptual y habilidad aritmética en los niños que intentan dar cuenta de cómo se desarrolla este proceso. Ante los resultados obtenidos, la diversidad de perfiles de conocimiento identificados en los niños ha sido interpretada como una muestra de la complejidad en las relaciones parte-todo que los niños entienden, y la existencia de diferentes rutas de desarrollo (Canobi, 2004, 2005; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003). Señalándose que algunas veces los niños desarrollan una comprensión conceptual con ausencia de la habilidad competente, y que estas diferencias sugieren que para la mayoría de los niños la comprensión conceptual y la habilidad computacional se desarrollan juntas, mientras que para otros no es así (Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Gilmore & Papadatpu-Pastou, 2009). Sugiriéndose también que la comprensión conceptual de los niños y sus habilidades procedimentales están en gran parte no relacionadas, al menos en algunos puntos durante su desarrollo (Schneider & Star, 2009).

Los estudios que evalúan la implementación de secuencias de instrucción, centran la atención en la forma en la que un ciclo de aprendizaje, generalmente centrado en un tipo de conocimiento, podría

Revista de Educación, 374. Octubre-Diciembre 2016, pp. 43-68
Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

facilitar el cambio del otro conocimiento. En esta línea se han analizado los efectos de la instrucción en la comprensión de números de varios dígitos y la habilidad computacional (Hiebert & Wearne, 1996); los efectos de la instrucción basada conceptualmente en el desarrollo de la flexibilidad de los procedimientos de adición y sustracción (Blöte, Van der Burg & Klein, 2001); los beneficios de una secuencia iterativa, en comparación con una secuencia de conceptos antes que procedimientos, sobre valor posicional decimal y procedimientos aritméticos (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009); entre otros. Los resultados en este tipo de estudios sugieren generalmente las secuencias son una buena fuente para potenciar las relaciones entre ambos conocimientos y facilitar su desarrollo. Se sugiere que la práctica de problemas secuenciada basada conceptualmente en principios de la adición, mejora la capacidad de los niños para ampliar su aprendizaje procesual a los nuevos problemas y conduce a una mejora en la capacidad de verbalizar conceptos clave (Canobi, 2009); o que una secuencia iterativa entre conceptos y procedimientos puede promover el aumento de los procedimientos correctos, conducir a una mejor recuperación del conocimiento y apoyar su integración (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Si bien en este tipo de estudios el conocimiento tiende a evaluarse con tareas de pre y post test, en ocasiones puede ser necesario algún tipo de conocimiento previo para beneficiarse plenamente de las lecciones del otro (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Es importante considerar que para valorar las interacciones entre el conocimiento conceptual y procedimental a través de las secuencias de instrucción, es difícil hacerlo de forma independiente.

Investigaciones actuales y líneas abiertas

Pese a los avances en el área en relación al estudio del conocimiento conceptual y procedimental, la revisión realizada sugiere que existen puntos de desacuerdo, que continúan siendo foco de debate, como la dificultad de definir y medir ambos tipos de conocimiento. La variedad de caracterizaciones presentes en la literatura y las tareas utilizadas para medirlos, que no siempre son acordes a cómo estos conocimientos se han definido, hace que sea difícil comprender los principales hallazgos, las formas en que estos conocimientos se relacionan, y determinar la forma más eficaz de utilizar la investigación para guiar las prácticas de enseñanza (Crooks y Alibali, 2014).

Aunque el conocimiento conceptual y procedimental no siempre pueden separarse, su distinción es útil para comprender mejor el desarrollo del conocimiento (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). El conocimiento conceptual caracterizado como un conocimiento rico y complejo se ha evaluado a través de un gran número de tareas que incluyen la utilización tanto de indicadores de conocimiento conceptual explícito -como las definiciones de los conceptos- o implícito -como la evaluación, juicio, justificación y aplicación de procedimientos- (Canobi, 2005; Canobi & Bethure, 2008; entre otros). La evaluación del conocimiento procedimental, caracterizado tradicionalmente como un conocimiento operacionalizado y secuenciado, se ha vuelto relativamente estandarizada, existiendo menor variabilidad en las tareas usadas para medirlo (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Para evaluar el conocimiento procedimental, los participantes suelen resolver un conjunto de problemas, evaluados en base a su velocidad, precisión, o el repertorio de procedimientos específicos que utilizan para llegar a sus respuestas (Canobi, Reeve, & Pattison, 1998; LeFevre et al, 2006; Schneider & Stern, 2010, entre otros). Mayoritariamente las tareas procedimentales son familiares para los participantes, mientras que sólo algunas veces incluyen el reconocimiento de que un procedimiento desconocido y adaptaciones pertinentes, o variaciones para afrontar el nuevo problema (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

La visión de los investigadores acerca de los conocimientos conceptual y procedimental, puede tener repercusiones importantes en los resultados obtenidos, ya que pueden afectar la naturaleza de las relaciones entre ambos conocimientos (Gilmore & Papadatpu-Pastou, 2009). Para Rittle-Johnson y Schneider (2014) actualmente no se han desarrollado enfoques estandarizados para evaluar estos conocimientos con una validez, fiabilidad y objetividad comprobadas. Estamos de acuerdo con estos autores, en que esta situación resulta problemática ya que el conocimiento almacenado en la memoria, tiene que ser deducido de la conducta manifiesta. No obstante, el comportamiento humano surge de la compleja interacción de multitud de procesos cognitivos y generalmente no refleja fehacientemente el contenido de la memoria. Las investigaciones futuras deben considerar cuidadosamente estos constructos, examinando como estos conocimientos son

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

operacionalizados y medidos, proporcionando evidencias de la validez de las medidas, y especificando modelos más exhaustivos que mejoren su comprensión (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Star, 2007).

Crooks y Alibali (2014) hacen un esfuerzo por ofrecer una caracterización del conocimiento conceptual que engloba en gran parte las caracterizaciones anteriores. Estas autoras dividen el conocimiento conceptual en dos tipos de conocimiento y establecen indicadores de evaluación para ambos. Consideran el conocimiento conceptual como: (i) el conocimiento de los principios generales, que incluye reglas, definiciones, conexiones y los aspectos de la estructura del dominio; y (ii) el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, que implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

Otra cuestión a considerar es la falta de investigaciones en otros dominios matemáticos, así como en otros niveles educativos (Star, 2000), que continúan desarrollándose esencialmente en la escuela primaria. Desde hace algunos años se ha empezado a incluir su estudio en adolescentes, adultos y futuros maestros. No obstante, se requiere mayor investigación en el área para poder contrastar los resultados obtenidos y obtener teoría útil que ayude a desentrañar la complejidad de estos tipos de conocimiento y sus relaciones.

Finalmente, conviene señalar el progreso logrado en la comprensión del desarrollo de estos conocimientos en los últimos 15 años. Para Rittle-Johnson y Schneider (2014) un paso importante a desarrollar es un modelo más amplio de las relaciones entre conceptos y procedimientos, profundizando en la manera cómo estos conocimientos se almacenan de forma independiente en la memoria a largo plazo; cómo ocurre este cambio con la experiencia; cómo la edad y las diferencias individuales impactan en las relaciones entre estos conocimientos; y, el estudio de la eficacia de los diferentes métodos de enseñanza; entre otros aspectos.

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Referencias bibliográficas

Bailey, D., Zhou, X., Zhang, Y., Cui, J., Fuchs, L., Jordan, N., Gersten, R., & Siegler, R. (2015). Development of fraction concepts and procedures in US and Chinese children. *Journal of Experimental Child Psychology, 129*, 68-83.

Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1- 33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 115–131.Baroody, A., & Gannon, K. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, *1*, 321–339.

Baroody, A., & Ginsburg, P. (1986): The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Associate.

Baroody, A., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition–subtraction inversion principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*, 131–171.

Baroody, A., Lai, M., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 41-60.

Baroody, A., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 2-9.

Bell, A., Costello, J. & Küchemann, D. (1983). Research on learning and teaching. *A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER-Nelson.

Berk, D., Taber, S., Carrino, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11(3)*, 113-135.

Bisanz, J., & LeFevre, J. (1992). Understanding elementary mathematics. *Advances in Psychology, 91*, 113-136.

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Bisanz, J., Watchorn, R., Piatt, C., & Sherman, J. (2009). On "Understanding" children's developing use of inversion. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 10-24.

Blessing, S., & Anderson, J. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 22(3)*, 576-598.

Blöte, A., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, *10*, 221-247.

Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93(3)*, 627-638.

Briars, D., & Larkin, J. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Briars, D., & Siegler, R. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology, 20(4)*, 607-618.

Brownell, W. A., & Chazal, C. B. (1935). The effects of premature drill in third-grade arithmetic. *The Journal of Educational Research*, *29*(1), 17-28.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education*: *A Searching Discussion of School Education Opening New Paths to Learning and Teaching*. New York: Vintage Books.

Byrnes, J. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7*, 235- 257

Byrnes, J., & Wasik, B. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology, 27(5)*, 777-786.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology, 74(3)*, 194-212.

Canobi, K. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19*, 81-93.

Canobi, K. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 92*, 220-246.

Canobi, K. (2009). Concept–procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology, 102*, 131–149.

Canobi, K., & Bethune, N. (2008). Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition, 108*, 675– 686.

Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (1998). The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving. *Developmental Psychology, 34(5)*, 882-891.

Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, 22(5)*, 513-532.

Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology, 39(3)*, 521-534.

Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp.113-132). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.

Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal, 26(4)*, 871-896.

Cowan, R., & Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology, 16*, 407-420.

Crooks, N., Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review; 34(4)*, 344-377.Dixon, J., & Moore, F. (1996). The development of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology, 32*, 241-253.

Dubé, A. (2014). Adolescents' understanding of inversion and associativity. *Learning and Individual Differences, 36*, 49-59.

Dubé, A., & Robinson, K. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 64(1)*, 60-66.

Fayol, M., & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems. *Cognition, 123(3)*, 392-403.

Farrington-Flint, L., Canobi, K. H., Wood, C., & Faulkner, D. (2007). The role of relational reasoning in children's addition concepts. *British Journal of Developmental Psychology, 25(2)*, 227-246.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer-Verlag Publishing.

Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C., & Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development, 60*, 1158–1171.

Gagné, R.M. (1968). Contributions of Learning to human Development. *Psychological Review,* 75, 177-191.

Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition, 13*, 343-359.

Gelman, R., & Meck, E. (1986). The Notion of Principle: The Case of Counting. In Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics* (pp. 29-57). Hillsdale. N.J: Erlbaum.

Gilmore, C., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology, 76*, 309-331.

Gilmore, C., & Bryant, P. (2008). Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology, 26(3)*, 301-316.

Gilmore, C., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 25-40.

Gilmore, C. & Spelke, E. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition, 107(3)*, 932-945.

Gray, E.M., & Tall, D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of PME XV*, vol. II, pp. 72-79.Assisi, Italy.

Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education,* 116-140.

Groth, R., & Bergner, J. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8(1)*, 37-63.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102(2)*, 395-406.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113(4)*, 469-486.

Hecht, S., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 86(4)*, 277-302.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.1-27). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 14(3)*, 251– 283.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

LeFevre, J., Greenham, S., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11(2)*, 95-132.

LeFevre, J., Smith-Chant, B., Fast, L., Skwarchuk, S., Sargla, E., Arnup, J., Penner-Wilger, M., Bisanz, J., & Kamawar, D. (2006). What counts as knowing? The Development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through grade 2. *Journal of Experimental Child Psychology, 93(4),* 285–303.

Matthews, P., & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology, 104(1)*, 1-21.

Oyarzún, C., & Salvo, S. (2010). Conocimiento conceptual y dificultades en la resolución de problemas verbales aritméticos en el nivel inicial. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 9(18), 13-33.

Patel, P., & Canobi, K. (2010). The role of number words in preschoolers' addition concepts and problem-solving procedures. *Educational Psychology, 30(2)*, 107-124.

Peled, I., & Segalis, B. (2005). It's not too late to conceptualize: Constructing a generalized subtraction schema by abstracting and connecting procedures. *Mathematical Thinking and Learning, 7(3)*, 207–230.

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016

Prather, R., & Alibali, M. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review, 29(4)*, 221-248.

Prather, R., & Alibali, M. (2011). Children's acquisition of arithmetic principles: The role of experience. *Journal of Cognition and Development, 12(3)*, 332-354.

Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: Its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 21(3)*, 60-85.

Riley, M., Greene, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91(1)*, 175.

Rittle-Johnson, B., & Kmicikewycz, A. (2008). When generating answers benefits arithmetic skill: The importance of prior knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 101(1)*, 75-81.

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology, 79*, 483–500.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. To appear in R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The Development of Mathematical Skills* (pp.75–110). Hove, United Kingdom: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93(2)*, 346.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology, 99(3)*, 561–574.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101(3)*, 529.

Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101(4)*, 836-852.

Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology, 82(3)*, 436-455.

Robinson, K., & Dubé, A. (2009). Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology, 103(4)*, 532-545.

Robinson, K., & LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics, 79(3)*, 409-428.

Robinson, K., & Ninowski, J. (2003). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, *57(4)*, 321-330.

Robinson, K., Ninowski, J., & Gray, M. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology, 94(4)*, 349-362.

Siegler, R. (1991). In young children's counting, procedures precede principles. *Educational Psychology Review, 3(2)*, 127-135.

Siegler, R., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. *Advances in Child Development and Behavior, 33*, 1-42.

Siegler, R., & Crowley, K. (1994). Constraints on learning in nonprivileged domains. *Cognitive Psychology, 27(2)*, 194-226.

Siegler, R., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, *127(4)*, 377-397.

Schneider, M. (2012). Commentary 2: knowledge integration in mathematics learning: the case of inversion. *Educational Studies in Mathematics, 79(3)*, 447-453.

Schneider, M., & Hardy, I. (2000). Profiles of inconsistent knowledge in children's pathways of conceptual change. *Developmental Psychology, 49(9)*, 1639-1649.
Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2011). Relations Among Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, and Procedural Flexibility in Two Samples Differing in Prior Knowledge. *Developmental Psychology*, *47(6)*, 1525-1538.
Schneider, M., & Stern, E. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 341–347). Mahwah, NJ: Erlbaum.
Schneider, M., & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning, 11(1-2)*, 92-101.
Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology, 46(1)*, 178-192.
Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
Star, J. (2000). On the relationship between knowing and doing in procedural learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth international conference of the learning sciences (pp. 80-86)*. Michigan.
Star, J. (2002). Re-conceptualizing procedural knowledge: The emergence of» intelligent» performances among equation solvers. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 999-1007)*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5)*, 404–411.
Star, J. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education 38(2)*, 132-135.
Star, J., & Newton, K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM: International Journal of Mathematics Education, 41(5)*, 557-567.

Star, J., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *102*(4), 408-426.

Star, J., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, *31*(3), 280-300.

Star, J., & Stylianides, G. (2000). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13(2)*, 169-181.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24(3)*, 335-359.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, *36(2)*, 155-193.

Dirección de contacto: Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Autónoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona), España. E-mail: a.castro.inostroza@gmail.com

Recibido: 14-07-2015 Aceptado: 04-06-2016