

# LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Manuel García Déniz

Un objetivo importante en Educación Primaria es el de "elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido."

La resolución de ejercicios y problemas es un proceso clave en la enseñanza de las matemáticas, mediante el cual los alumnos experimentan la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que los rodea.

Las capacidades que se deben desarrollar son:

- reconocer y formular problemas
- desarrollar y aplicar diversas estrategias
- verificar e interpretar conclusiones
- generalizar soluciones y estrategias
- aplicar el proceso a situaciones problemáticas del mundo real.

No se puede dejar solo al alumno para que descubra o invente las estrategias y mecanismos heurísticos necesarios. El profesor debe enseñar, de forma cooperativa a ser posible, a resolver problemas.

La propuesta consiste en:

- Utilizar los problemas como herramientas de adquisición de estrategias y de desarrollo de cuestiones matemáticas.
- Conocer algunas estrategias sencillas y métodos para adquirir hábitos de resolución de problemas.
- Desarrollar una metodología adecuada para la enseñanza de la resolución de problemas.
- Soluciones prácticas para la resolución, en el aula y fuera de ella, de problemas interesantes y no habituales.

Los contenidos utilizados en el transcurso de la formación son:

1. Proceso de resolución de problemas.
2. Desarrollo y aplicación de diversas estrategias, generales y específicas.

3. Habilidades instrumentales necesarias.
4. La representación gráfica. Distribuciones espaciales.
5. Lógica y resolución de problemas.
6. Resolución de problemas aritméticos.
7. Los problemas de geometría.
8. Caracterización de los tipos de problemas.
9. Determinación de criterios para la elaboración de baterías de problemas.
10. Actividades lúdicas a partir de la resolución de problemas.
11. Los problemas de ingenio.
12. Ideas prácticas para utilizar juegos y problemas en el aula.
13. Los puzzles y los problemas.
14. Problemas contados o escenificados.
15. La Magia Matemática.
16. El Rincón de las Matemáticas.

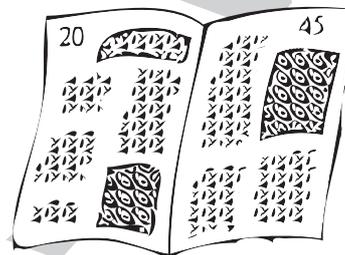
En el desarrollo de estos contenidos se utilizan diversos materiales: Fotocopias con problemas, Retroproyector, Material retroproyectable, Modelos variados, Calculadoras de cuatro operaciones, Lápices de colores, Tijeras, Pegamento, Pizarra y tizas, etc.

Para entender el proceso que se sigue podemos explicarlo mediante un ejemplo de los utilizados en las sesiones de formación.

## UN DIARIO.

**En un periódico diario, formado por un solo cuadernillo de hojas y en el cual 11 páginas están dedicadas al deporte, las páginas 20 y 45 se encuentran sobre la misma cara de una de las hojas.**

**¿Cuántas páginas tiene ese diario en total?**



### Comentarios:

*Procedencia:* Rally Matemático Transalpino.

*Dominio de conocimientos:* Aritmética. Estrategias de conteo. Búsqueda de patrones.

*Categoría:* Segundo y tercer Ciclo de Educación Primaria.

*Análisis de la tarea:*

La respuesta a este problema dependerá del tipo de instrucción que se haya recibido en resolución de problemas. Si el alumno sólo ha resuelto problemas a partir de un modelo previo difícilmente podrá resolverlo.

Sin embargo, las operaciones que precisa el problema son de muy fácil manejo: sumar, restar y multiplicar por 2. Además las cantidades que se manejan son inferiores a 50.

Si acaso, algunos de nuestros alumnos más despabilados, ¡que siempre los hay, afortunadamente y a pesar de nosotros!, podrán iniciar una búsqueda a través de un tanteo totalmente carente de sistematización. Y, a veces, hasta encuentran una solución...

¿Qué le falta, pues, al alumno para abordar la resolución de este problema de una forma matemática?

Fundamentalmente, seis cosas:

- a) El conocimiento de una estrategia general para abordar la resolución de cualquier problema.
- b) Utilización de un pensamiento lógico no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.
- c) El aprendizaje de unos elementos lógicos de distribución espacial que, en forma gráfica, le ayuden a disponer los datos del problema.
- d) El conocimiento de algunos, muy pocos y sencillos, heurísticos específicos que le permitan vislumbrar un camino en la

búsqueda de la solución.

e) La sistematicidad de su pensamiento que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.

f) El gusto de la exploración matemática, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.

g) Apertura de pensamiento para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución, sin que por ello sea más o menos valioso.

Volvamos al problema anterior y tratemos de resolverlo.

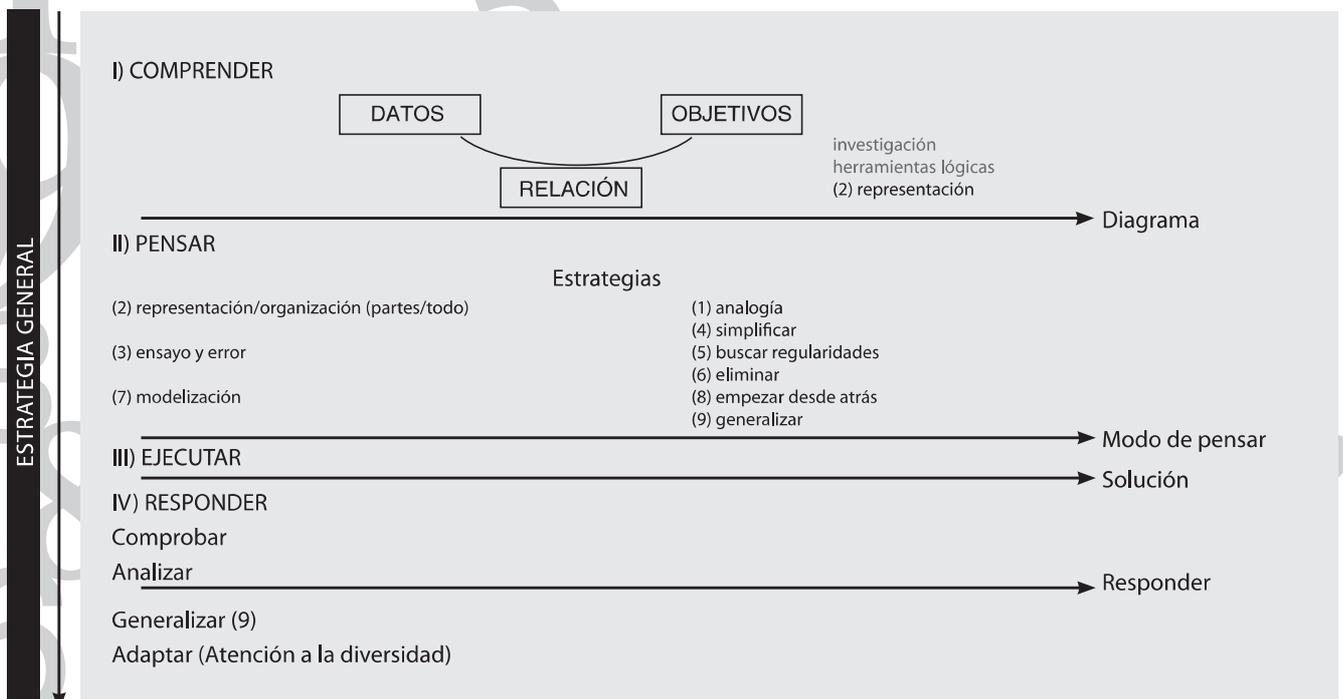
Un aspecto interesante que se promueve es el trabajo cooperativo. No se trata de que cada alumno, de manera independiente se enfrente con el problema. Eso plantea problemas de todo tipo, desde la dificultad de seguir individualmente el proceso de resolución hasta la evaluación final de cada alumno, pasando por la detección y resolución de las distintas dificultades surgidas en el proceso. Por ello se favorece la posibilidad del trabajo en equipo, siendo las agrupaciones de alumnos de distinto tipo en cada fase del proceso de resolución. En la primera y la cuarta fase parece más adecuado el trabajo en gran grupo, mientras que en la segunda y tercera es más indicado el trabajo en pequeños grupos (cuatro, cinco o seis alumnos). Resulta muy natural el paso de una modalidad a otra y son los propios alumnos quienes van marcando el ritmo y el modo del trabajo.

El primer aspecto a considerar en la resolución es el uso de una estrategia general que incluya, en sus distintos apartados, las herramientas lógicas necesarias y las estrategias específicas adecuadas.

Se plantea el siguiente esquema de resolución:

### PROCESO de RESOLUCIÓN de PROBLEMAS

PROPUESTA (enunciado del problema: texto escrito, oral, gráfico o manipulativo)



En la fase I, de COMPRENDER, hay varias maneras de afrontar este problema. Pero, en cualquier caso, es importante conocer como son los cuadernillos de papel que forman una publicación periódica. Lo primero que se aprecia es que desconocemos mucho de la situación de partida que define el problema.

Para que este camino sea recorrido sin dificultades, sistemáticamente, necesitamos el uso de otro heurístico básico: “representar los datos, organizar la información”. Para ello podemos utilizar figuras, diagramas, tablas, gráficas, codificaciones, etc, y en muchos casos un “modelo”.

En cada hoja, la página de la izquierda (la que queda debajo) tiene numeración impar mientras que la de la derecha (la que queda encima) tiene numeración par. Si consideramos el cuadernillo completo, abierto como se ve en la ilustración, tendremos que la parte izquierda tiene numeración par y la derecha impar.

En cualquier caso, antes de la página de la izquierda hay tantas páginas como indica la numeración visible menos una; y después de la página de la derecha hay tantas páginas hasta el final como las que hay antes de la de la izquierda.

¡Ah! Las que están dedicadas a Deportes no “pintan” nada en el problema; son una distracción.

Por lo tanto, los DATOS son las páginas “conocidas” (la 20 y la 45, la 1 y la última), el OBJETIVO es “conocer” el total de páginas, o sea, cuál es la última, y la RELACIÓN es que cada pareja ocupa el mismo lado o cara de la hoja.

Aquí podríamos terminar con un diagrama que reflejase lo comprendido. Podría ser la propia ilustración del problema, añadiendo algunas hojas antes y después de la dibujada, o, mejor, una serie numérica.

Si colocásemos las numeraciones de las páginas en orden, y llamando  $a_n$  a la última página, tendríamos:

**1 2 ... 18 19 20 21 ... 44 45 46 47 ...  $a_n-1$   $a_n$**

Podríamos entrar ya en la fase II, de PENSAR. Ahí se trataría de buscar un manera de afrontar la resolución. ¿Qué podemos hacer para resolver el problema. Algunos alumnos entienden que se trataría de CONTABILIZAR el número de páginas, es decir, de ORGANIZAR la información que se ha obtenido. Otros podrían entender la necesidad de BUSCAR UNA REGULARIDAD en la colocación de las páginas, que se presente que existe. En todo caso, el maestro debe realizar las preguntas adecuadas y dar las orientaciones necesarias para facilitar el uso de este tipo de estrategias específicas. Llegar a esta conclusión no es fácil. El alumno ha de estar entrenado en este tipo de pensamiento. Se puede apoyar y verificar experimentalmente. Pero el maestro ha de enseñarlo. No puede confiar en que el niño o la niña adquiera ese tipo de pensamiento de manera intuitiva. Se trata de un aprendizaje difícil y lento, pero ese es el reto del aprendizaje “integral”. No basta con formar buenos CALCULISTAS; necesitamos buenos PENSADORES.

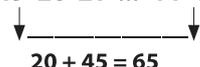
En la fase III, de EJECUTAR, se pondrán en marcha las ideas que se han descubierto o explorado en la fase anterior. Así, unos podrán simplemente darse cuenta de que el número de páginas después de la 45 es el mismo que hay antes de la 20.

La ejecución en este caso pasa por calcular que, al haber 19 páginas antes de la 20, habrá  $19 + 45 = 64$  páginas en total. Se puede

hacer por suma, pero también por simple conteo.

Otros tratarán de buscar el centro del periódico, el total de páginas será el doble. Es decir, las páginas centrales serán las 32 y 33. Puede encontrarse por simple conteo hacia el centro del periódico o por media:  $(20 + 45) / 2 = 65 / 2 = 32,5$  (página que no existe, solamente expresa un número entre 32 y 33). Si la mitad del periódico lo marca la página 32, el total de páginas será  $32 \times 2 = 64$ .

Algunos (sobre todo los que están acostumbrados a explorar e investigar las situaciones presentadas) se dan cuenta de que hay un PATRÓN en las páginas que se encuentran en la misma cara de la hoja:

**1 2 ... 18 19 20 21 ... 44 45 46 47 ...  $a_n-1$   $a_n$**   
  
**20 + 45 = 65**

Todas las parejas de páginas que se encuentran en el mismo cuadernillo suman 65. Lo podemos ver fácilmente en las dos de la ilustración, pero también:

**21 + 44 = 65 ; 19 + 46 = 65 ; 18 + 47 = 65 ; ...**

Esto nos indica que, generalizando la situación, también la suma de la primera y la última darán la misma suma:

**$1 + a_n = 65$ .**

Y de aquí resulta muy sencillo saber cuál es la última página:  **$a_n = 65 - 1 = 64$ .**

Finalmente, entramos en la fase IV, de RESPONDER, que debería comenzar por comprobar la solución o soluciones obtenidas y que todo el proceso es correcto.

Se puede realizar por consenso, por cálculo o por MODELIZACIÓN. En cualquier caso, además de comprobar debe ponerse en conexión con el contexto del problema original y analizar si la solución se atiene a las características del objetivo deseado. En este momento se puede ya elaborar la RESPUESTA:

**El diario tiene 64 páginas en total.**

Recapitemos ahora en lo esencial del método descrito.

Es necesario motivar al alumno para que acepte el problema como un desafío; aceptado éste, el verdadero problema se plantea cuando el alumno no encuentra solución y se bloquea.

Un mismo planteamiento puede ser para un alumno un problema y para otro un ejercicio; todo depende de su trabajo anterior.

En la escuela, generalmente, se enseña QUÉ PENSAR pero no CÓMO HACER PARA PENSAR; no se entrena al alumno para pensar.

**EN LA ESCUELA HAY QUE FORMULAR EXPLÍCITAMENTE LOS PROCESOS QUE SE APLICAN AL RESOLVER LOS PROBLEMAS**

El currículo oculto en resolución de problemas es insuficiente. Hay que hacer diseños instruccionales para que el alumno se

entrene de forma explícita en la resolución de problemas. El alumno no asimila la estructura matemática que está detrás del enunciado.

La ESTRATEGIA de resolución de problemas se puede definir como: TRADUCIR y luego RESOLVER.

Una ESTRATEGIA es una técnica general de resolver problemas. Las estrategias no garantizan que se encuentre una respuesta, pero guiarán la solución del problema.

Los HEURÍSTICOS ESPECÍFICOS o ESTRATEGIAS ESPECÍFICAS son operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas matemáticos. Son "reglas" o "modos de comportamiento que favorecen el éxito.

Hay distintos modelos para guiar el proceso de resolución de problemas. Todos ellos tienen en común las siguientes fases fundamentales:



El alumno ha de tener una serie de conocimientos básicos que le permitan afrontar la resolución de un problema.

Conocimientos lingüísticos: habilidad lectora y dominio gramatical. La estructura lingüística es sólo el vehículo que transmite el mensaje o contenido.

Conocimientos semánticos y contextuales: contenido matemático y extramatemático. Los conocimientos contextuales se evidencian en los problemas con mayor o menor grado de proximidad a los intereses de los estudiantes (problemas reales y realistas).

Conocimientos del esquema o estructura: especialmente el esquema semántico de las relaciones matemáticas. Partes/ todo.

Conocimientos operativos: el sujeto necesita saber hacer las operaciones matemáticas.

Conocimiento de estrategias: estrategias generales y heurísticos específicos.

Los heurísticos específicos más significativos son los siguientes:

1. RECORDAR UN PROBLEMA SIMILAR (ANALOGÍA).
  - 1.1. Problema similar resuelto anteriormente.
  - 1.2. Resolver antes un problema similar más sencillo (con números más pequeños, transformado en una situación familiar conocida, con menos variables, etc.
2. REPRESENTACIÓN DE DATOS (ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN)
  - 2.1. Hacer una figura o un diagrama.
  - 2.2. Construir tablas.
  - 2.3. Hacer gráficas.
  - 2.4. Codificar algebraicamente (ecuaciones) o numéricamente los datos o situaciones del problema.
3. CONJETURAR Y COMPROBAR (ENSAYO Y ERROR).
4. SIMPLIFICAR.
5. BUSCAR REGULARIDADES, ENCONTRAR UNA LEY O PATRÓN (GENERALIZAR).
6. ELIMINAR.
7. CONSTRUIR MODELOS (ANALOGÍA).
8. EMPEZAR UN PROBLEMA DESDE ATRÁS.
9. GENERALIZAR.

## LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS BÁSICAS HAY QUE ENSEÑARLAS COMO UN CONTENIDO MÁS.

El heurístico número 2, REPRESENTACIÓN DE DATOS, es uno de los más potentes que se pueden enseñar a los alumnos. Debemos ofrecer continuamente a nuestros alumnos las herramientas de representación que necesita: figuras, diagramas, tablas, listados, codificaciones. En el fondo, la enseñanza de las matemáticas es un ofrecimiento continuo de nuevas herramientas de este tipo. No basta con exponerlas; es importantísimo enseñar a utilizarlas.

Otro heurístico poderoso es el número 1, la ANALOGÍA, que de hecho es el más utilizado por el profesor en la enseñanza de la resolución de problemas, incluso en aquellos que sólo utilizan como método el de modelos. Utilizar modelos es una analogía. Pero no es la única que se puede enseñar a los alumnos.

Un heurístico parecido al anterior es el número 4, SIMPLIFICAR. Consiste en modificar el enunciado del problema mediante la utilización de números más pequeños, separando en subproblemas, resolviéndolo en casos independientes o trabajando con ejemplos. En ocasiones, esta técnica puede allanar la comprensión de un problema que podía parecer muy complicado en una primera lectura.

Un heurístico sencillo, del que los alumnos tienen una idea intuitiva, es el número 6, ELIMINAR. Sólo es necesario conseguir que los alumnos sean sistemáticos, tanto en la elaboración de la lista inicial como en los criterios a utilizar en el proceso de eliminación. No es un heurístico de utilización generalizada, como los anteriores, pero es siempre una alternativa válida a tener en cuenta por parte de los alumnos. Es muy útil en los problemas relacionados con la LÓGICA, que debe ser muy trabajada desde los primeros años.

De mucha importancia resulta que los alumnos aprendan, desde muy pequeños y en situaciones apropiadas, a utilizar el heurístico número 5, BUSCAR REGULARIDADES. Se puede hacer un buen entrenamiento en seriaciones que pueden empezarse con dibujos sencillos, buscando semejanzas y diferencias que conducen a la búsqueda de un patrón que permita inferir cómo ha de ser el siguiente término de la serie. Pasando después a sucesiones numéricas y más tarde a juegos que originen series de números, se llega de una manera sencilla a la obtención de una regla. Se llega así a la GENERALIZACIÓN.

Todos los heurísticos son importantes. La oportunidad de enseñar uno u otro depende de los alumnos, de la planificación de nuestras clases y de la batería de problemas que diseñemos.

El pensamiento matemático es un proceso dinámico que extiende nuestra capacidad de comprensión. La práctica con reflexión es lo que sirve para mejorar el razonamiento matemático.

## TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMÁTICAMENTE.

"La resolución de problemas debe ser el eje de la enseñanza de las matemáticas" (Agenda in action, 1980). Esta fue la primera recomendación hecha por el NCTM en abril de 1980 y ha sido asumida como objetivo prioritario de la educación matemática por la mayoría de los países.

La resolución de problemas abarca muchas funciones rutina-

rias y triviales, así como otras poco corrientes que se consideran esenciales en la vida diaria de los ciudadanos. Es una capacidad específica de la inteligencia, por tanto, si la educación debe contribuir al desarrollo de ésta, es fundamental incidir en la resolución de problemas.

Por otro lado, el alumno al resolver problemas descubre la utilidad de lo que estudia, comprueba para qué sirven los conocimientos matemáticos aprendidos, conectando la teoría y la práctica al servicio de las ciencias actuales, sin que esto signifique que las matemáticas que se enseñen estén orientadas exclusivamente a satisfacer las necesidades particulares de las matemáticas en un momento determinado y para resolver un problema dado.

El poder auténtico de la resolución de problemas exige un amplio repertorio de conocimientos, no sólo de destrezas y conceptos particulares sino también de la relación entre ellos y los principios fundamentales que los unifican.

Un problema es una tarea que plantea a una persona la necesidad de hallar una solución, para lo cual ha de buscar el camino adecuado.

La metodología utilizada surge, fundamentalmente, de las dificultades que los alumnos encuentran en la resolución de problemas.

Estas dificultades se pueden resumir en:

1. Falta de comprensión del enunciado del problema.
  - a) Porque los alumnos no poseen comprensión lectora.
  - b) Porque el "vocabulario" utilizado no es dominado por el alumno.
  - c) Porque las situaciones planteadas no son familiares a los niños.
  - d) Porque no diferencian lo que conocen (datos que le dan) de lo que buscan (objetivo o datos que le piden) y, más difícilmente, es capaz de encontrar la relación que los conecta.
2. Tienen dificultad para reconocer la estrategia a seguir.
3. En la mayoría de los casos el alumno conoce propiedades sencillas, pero o bien tiene dificultad para captar cual es la más adecuada para aplicar o no domina la operatoria.
4. No suelen plantearse si la solución obtenida es o no correcta con la información recibida.

Como norma a seguir en el planteamiento de problemas se sugiere abandonar el modelo comúnmente utilizado en nuestras aulas y reflejado en la mayoría de los libros de texto, que se sintetiza en:

1. **MOTIVAR:** Generalmente, la motivación utilizada tanto por los profesores como por los libros de texto, está alejada de la realidad del niño (motivación extrínseca).
2. **ENSEÑAR UN MODELO:** Si el profesor enseña problemas del cálculo de áreas, generalmente no suele pasar a otros modelos hasta no tenerlo interiorizado.
3. **AUTOMATIZAR:** Mediante la repetición de problemas equivalentes.

Proponemos sustituirlo por:

- 1) Motivar, proponiendo problemas reales y realistas sacados de la vida real y del entorno del niño o problemas imaginarios que sean atractivos para los niños.
- 2) Trabajar indistintamente varios "modelos" mediante el planteamiento de problemas más variados.

3) Llegar a la automatización del modelo mediante el razonamiento analógico y no sólo mediante la repetición.

Las clases de problemas que se pueden plantear son:

1. Problemas con datos completos.
2. Problemas donde sobren datos para su resolución.
3. Problemas donde falten datos para su resolución.
4. Problemas abiertos, esto es:
  - que tengan más de una solución.
  - que se puedan resolver de maneras diferentes.
5. Problemas en los que los alumnos tienen que plantear el enunciado del mismo, respondiendo a una pregunta dada o a unos datos conocidos.

Se pueden pasar dos problemas semanales (al principio bastará con uno), dedicando un día fijo a la semana para realizar el trabajo. El entrenamiento de los alumnos hará que este ritmo pueda variar a lo largo del curso. Es importante tener preparados problemas similares a los que se van a plantear para utilizar (si lo creemos conveniente) al finalizar la cuarta fase; sería una adaptación para los distintos grupos de alumnos que resultaran, en unos casos para profundizar y mejorar (alumnos avanzados) y en otros para reforzar o permitir el éxito a los alumnos con dificultades de aprendizaje.

Hay muchos materiales bibliográficos que se pueden utilizar; se recomiendan los siguientes:

Kaye Stacey - Susie Groves

*"Resolver problemas: estrategias (Unidades para desarrollar el razonamiento matemático)"*

Madrid, 1999. (Traducción y adaptación de M<sup>a</sup> Luz Callejo y José Carrillo)

NARCEA, S. A. EDICIONES.

J. Hernández Domínguez, M. J. Martín Morales, M<sup>a</sup> A. Noda Herrera, M. M. Socas Robayna

*"Resolución de problemas de matemáticas en la Educación Primaria. Los problemas aritméticos."*

Canarias, octubre de 2000. Cuadernos de Aula, DIRECCIÓN GENERAL DE ORDENACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES. GOBIERNO DE CANARIAS

El primero sería una herramienta de mejora personal en la formación y el segundo un material básico de trabajo en el aula.